

§ 2. Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің түрлері. Қалыпты жүйе, оны жоғарғы ретті теңдеуге келтіру

1. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі жалпы түрде былай жазылады:

$$F_j \left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_2^{(m_2)}, \dots, x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{(m_k)} \right) = 0, \quad (j = \overline{1, k}). \quad (1)$$

Мұндағы t – тәуелсіз айнымалы, $x_1, \dots, x_k$ – ізделінетін функциялар, ал

$$x_j^{(l)} := \frac{d^l x_j}{dt^l}, \quad l = \overline{1, m_j}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Біз теңдеулердің саны ізделінетін функциялар санына тең болатын жағдайды қарастырамыз. Жүйедегі F_j , $j = \overline{1, k}$ функциялары $1 + k + m_1 + \dots + m_k$ айнымалылардан тәуелді. Олар осы $t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_2^{(m_2)}, \dots, x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{(m_k)}$ айнымалыларының кеңістігінде жататын қан-дай да бір D облысында анықталған.

Дифференциалдық теңдеулер жүйесін әдетте *дифференциалдық жүйе* деп атайды. (І-тарау, §1-ты қараңыз). Жүйеге кіретін x_j функциясы туындыларының ең жоғарғы реті жүйенің x_j бойынша реті деп аталады, ал $m_1 + \dots + m_k = n$ саны (1) жүйенің реті деп аталады.

Қандай да бір $\langle a, b \rangle \subset \mathbf{R}$ аралығында анықталған $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_k = \varphi_k(t)$ функциялар жиынтығы (жүйесі) мына шарттарды:

1) $\langle a, b \rangle$ аралығында x_j , $j = \overline{1, k}$ функцияларының сәйкес m_j ретке дейінгі туындылары бар;

$$2) \left(t, \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \dots, \varphi_1^{(m_1)}(t), \varphi_2(t), \dot{\varphi}_2(t), \dots, \varphi_2^{(m_2)}(t), \dots, \varphi_k(t), \dot{\varphi}_k(t), \dots, \varphi_k^{(m_k)}(t) \right) \in D, \quad \forall t \in \langle a, b \rangle;$$

$$3) F_j \left(t, \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \dots, \varphi_1^{(m_1)}(t), \dots, \varphi_k(t), \dot{\varphi}_k(t), \dots, \varphi_k^{(m_k)}(t) \right) = 0, \quad \forall t \in \langle a, b \rangle, \quad \forall j = \overline{1, k},$$

қанағаттандыратын болса, онда оны (1) жүйенің $\langle a, b \rangle$ аралығындағы шешімі деп атайды.

Жүйенің шешімін табу үдерісі *оны интегралдау* деп аталады.

(1) түрде жазылған жүйені қарастыру әр түрлі жағдайларға тәуелді. Солардың негізгілерінің бірі – (1) жүйенің оған кіретін функциялардың ең жоғарғы ретті туындылары бойынша шешілетін жағдайы.

(1) жүйе жоғарғы ретті туындылар $x_1^{(m_1)}, x_2^{(m_2)}, \dots, x_k^{(m_k)}$ бойынша шешілсін:

$$x_j^{(m_j)} = f_j \left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(m_1-1)}, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_2^{(m_2-1)}, \dots, x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{(m_k-1)} \right) = 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

(2)

Алынған (2) жүйе *канондық жүйе* деп аталады.

Шешімдерінің арасында өзара сәйкестік бар дифференциалдық жүйелер *эквивалентті* деп аталады.

Жоғарғы ретті k теңдеулерден тұратын канондық (2) жүйені оған эквивалентті, туындылары бойынша шешілген $m_1 + \dots + m_k = n$ бірінші ретті теңдеулерден тұратын жүйемен ауыстыруға болады. Ол үшін (2) жүйеге мынадай ауыстыру енгіземіз:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10}, \dot{x}_1 = x_{11}, \ddot{x}_1 = x_{12}, \dots, \overset{(m_1-1)}{x_1} = x_{1,m_1-1}, \\ x_2 &= x_{20}, \dot{x}_2 = x_{21}, \ddot{x}_2 = x_{22}, \dots, \overset{(m_2-1)}{x_2} = x_{2,m_2-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_k &= x_{k0}, \dot{x}_k = x_{k1}, \ddot{x}_k = x_{k2}, \dots, \overset{(m_k-1)}{x_k} = x_{k,m_k-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Енгізілген x_{jl} ($j = \overline{1, k}, l = \overline{0, m_j}$) функцияларының жалпы саны n -ге тең. Оларға қатысты (2) жүйе мына түрге келтіріледі:

$$\begin{cases} \dot{x}_{10} = x_{11}, \dot{x}_{11} = x_{12}, \dots, \dot{x}_{1,m_1-2} = x_{1,m_1-1}, \\ \dot{x}_{1,m_1-1} = f_1(t, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1,m_1-1}, \dots, x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{k,m_k-1}), \\ \dot{x}_{20} = x_{21}, \dot{x}_{21} = x_{22}, \dots, \dot{x}_{2,m_2-2} = x_{2,m_2-1}, \\ \dot{x}_{2,m_2-1} = f_2(t, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1,m_1-1}, \dots, x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{k,m_k-1}), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_{k0} = x_{k1}, \dot{x}_{k1} = x_{k2}, \dots, \dot{x}_{k,m_k-2} = x_{k,m_k-1}, \\ \dot{x}_{k,m_k-1} = f_k(t, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1,m_1-1}, \dots, x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{k,m_k-1}). \end{cases} \quad (4)$$

Бұл жүйе k топтан құрылып тұр. Әрбір j -топтағы алғашқы $(m_j - 1)$ теңдеу x_{jl} функциялары анықталатын (3) формуладан шығады да, ал соңғы m_j - теңдеу (2) жүйенің j -теңдеуінен ондағы туындыларды жаңа енгізілген функциялармен ауыстыру арқылы алынады. Сонымен (2) жүйеден (4) жүйе алынады. Әлбетте (2) жүйенің әрбір шешімінен (4) жүйенің шешімін табуға болады.

Егер (4) жүйенің әрбір топтың бірінші жолындағы теңдеулер негізін-де x_{j1} -ді $\dot{x}_j$ -мен,

x_{j2} -ні $\ddot{x}_j$ мен, т. с. с., x_{j,m_j-1} -ді $\overset{(m_j-1)}{x_j}$ -мен ауысты-рып, оларды топтардың соңғы теңдеулеріне қоятын болсақ (олардағы x_{jl} -дің орнына x_j қойып), онда әлбетте біз (2) жүйеге қайта ораламыз. Әрине бұл жағдайда (4) жүйенің әрбір шешімінен (2) жүйенің шешімін алуға болады.

Ізделінетін $x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1,m_1-1}, \dots, x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{k,m_k-1}$ функцияларын $1, 2, \dots, n = m_1 + \dots + m_k$ цифрларымен қайтадан нөмірлесек, яғни $x_{10} = x_1, x_{11} = x_2, \dots, x_{1,m_1-1} = x_{m_1}, \dots, x_{k,m_k-1} = x_n$ ауыстыруын енгізсек, онда (4) жүйенің туындылар бойынша шешілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің

(5)

Канондық (2) жүйенің жеке түрі болып жоғарғы ретті туынды бойынша шешілген n -ретті бір дифференциалдық теңдеу табылады:

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}).$$

эквивалентті. Мұндағы $x_1, \dots, x_n$ айнымалылары $x_1 := x, x_2 := \dot{x}, \dots, x_n := x^{(n-1)}$ теңдіктері арқылы енгізілген. Сондықтан да бұл теңдеуді n -ретті дифференциалдық теңдеудің *қалыпты түрі* деп атайды.

Реті n -ге тең (5) қалыпты жүйенің n -ретті бір дифференциалдық тендеуге эквивалентті (шешімдерінің арасында өзара сәйкестік бар болуы мағынасында) екенін көрсетелік.

Жүйенің бірінші теңдеуін $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$ алып, оны t бойынша дифференциалдайық

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \dot{x}_n.$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} f_n =: g_2(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\ddot{x}_1 = g_2(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_n} f_n =: g_3(t, x_1, \dots, x_n),$$

яғни $\ddot{x}_1 = g_3(t, x_1, \dots, x_n)$ теңдеуін аламыз. Әрі қарай осылайша жасай беру арқылы мынадай теңдеулерді

(6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \ddot{x}_1 = g_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ x_{(n-1)} = g_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (7)$$
$$x_j = \varphi_j \left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)} \right), \quad j = \overline{2, n}$$
$$x_1^{(n)} = g_n(t, x_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) =: \varphi \left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)} \right) \quad (8)$$

Керісінше, $x_1(t)$ функциясы (8) теңдеудің қандай да бір $\langle a, b \rangle$ аралығында шешімі

Бұл белгілі $x_1(t), \dot{x}_1(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)$ функцияларын (7) жүйеге қоялық. Ұйғарым бойынша ол жүйе $x_2, x_3, \dots, x_n$ айнымалыларына қатысты шешіледі, яғни $x_2, x_3, \dots, x_n$ шамалары t айнымалысының белгілі функциялары ретінде өрнектеліп шығады. Сонда табылған $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ функциялар жиынтығы (5) жүйенің $\langle a, b \rangle$ аралығындағы шешімі болады.

Шынында да (7) жүйенің $x_2, x_3, \dots, x_n$ айнымалылары бойынша шешілуі осы айнымалылардың қарастырылып отырған мәндерінде мына якобиан (квадрат Якоби матрицасының анықтауышы)

$$\frac{D(f_1, g_2, \dots, g_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (9)$$

нөлге тең емес дегенді білдіреді. Осы (7) жүйеден табылған $x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ функциялары мен (8) теңдеудің шешімі болатын $x_1(t)$ функциясын (7) жүйеге қайта қоятын болсақ, тепе-теңдіктер жүйесін аламыз. Бірінші теңдік

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$$

түрінде, ал екінші теңдік

$$\ddot{x}_1(t) = g_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) := \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} f_n, \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$$

түрінде болатыны айқын. Бірінші теңдікті дифференциалдасақ

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \dot{x}_n, \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$$

теңдігін аламыз. Бұдан екінші теңдікті алсақ,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} (\dot{x}_1 - f_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} (\dot{x}_2 - f_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (\dot{x}_n - f_n) = 0, \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$$

алынады. Дәл осылайша

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} (\dot{x}_1 - f_1) + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} (\dot{x}_2 - f_2) + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial x_n} (\dot{x}_n - f_n) = 0, \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$$

теңдігі алынады. Әрі қарай жалғастыра отырып, ең соңында

$$\frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1} (\dot{x}_1 - f_1) + \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_2} (\dot{x}_2 - f_2) + \dots + \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_n} (\dot{x}_n - f_n) = 0, \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдіктерден бірінші теңдікті ескере отырып мынадай теңдіктер жүйесін аламыз:

$$\ln|(x-t)| = \ln|x-t| + \ln C_1 \Rightarrow (x-t) = C_1(x-t)$$

өрнегін аламыз. Қарастырмай кеткен $(x-t)' = 0$ мәні бұл өрнектен $C_1 = 0$ болғанда алынады. Тағы бір рет интегралдау ($x-t \neq 0$) арқылы x функциясын табамыз.

$$\ln|x-t| = C_1 t + \ln C_2 \Rightarrow x-t = C_2 e^{C_1 t} \Rightarrow x = t + C_2 e^{C_1 t}.$$

$x-t=0$ мәні $C_2 = 0$ болғанда шығады. Ал y функциясын табу үшін берілген жүйенің бірінші теңдеуін пайдаланамыз:

$$y = \dot{x} - 1 = C_1 C_2 e^{C_1 t}.$$

Сонымен, берілген қалыпты жүйенің жалпы шешімі

$$x = t + C_2 e^{C_1 t}, \quad y = C_1 C_2 e^{C_1 t}$$

функциялары болады.

Ескертулер. 1. Егер (9) якобиан нөлге тең болса, онда x_1 функциясының орнына $x_2, x_3, \dots, x_n$ функцияларының біреуін алуға болады. Тек қалған функцияларға қатысты жазылған якобиан нөлге тең болмауы керек. Егер де x_1 үшін $x_2, x_3, \dots, x_n$ функцияларының қайсысын алса да, қалған функциялар арқылы жазылған якобиан нөлге тең болса, онда әр түрлі жағдайлар болуы мүмкін. Оған мынандай мысалдар келтіруге болады.

2-МЫСАЛ. Қалыпты жүйе

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1), \quad \dot{x}_2 = f_2(t, x_2), \quad \dot{x}_3 = f_3(t, x_3)$$

өзара тәуелсіз теңдеулерден құралған. Олардың әрқайсысы жеке-жеке интегралданады. Бұл жүйені оған эквивалентті (жоғарыдағы мағынада) болатын үшінші ретті бір теңдеуге келтіру мүмкін емес.

3-МЫСАЛ. Мына жүйенің

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1), \quad \dot{x}_2 = f_2(t, x_2, x_3), \quad \dot{x}_3 = f_3(t, x_2, x_3), \quad f'_{3x_2} \neq 0$$

соңғы екі теңдеуін жоғарыда көрсетілген жолмен екінші ретті бір теңдеуге келтіруге болады. Ал ол екі теңдеуге кірмейтін x_1 функциясына қатысты бірінші теңдеу жеке интегралданады.

Жалпы жағдайда (5) жүйе жоғарғы ретті $m \leq n$ теңдеулер тобына келтіріледі. Әлбетте барлық теңдеулердің реттерінің қосындысы n -ге тең болады. Алынған теңдеулер тобын интегралдау барысында жалпы шешімге кіретін еркін тұрақтылар саны кей жағдайда n -нен асып кетуі мүмкін. Онда олардың арасында өзара тәуелділіктер бар болады (тәуелсіздерінің саны – n). Ол байланыстарды анықтау үшін табылған шешімді жүйенің теңдеулеріне қою жеткілікті.

2. Егер жоғарғы ретті теңдеуге келтіру әдісін сызықтық теңдеулердің қалыпты жүйесіне

$$\dot{x}_j = a_{j1}(t)x_1 + \dots + a_{jn}(t)x_n + b_j(t), \quad j = \overline{1, n}$$

колданатын болсақ, онда x_1 -ге қатысты алынатын теңдеу де сызықтық болады:

$$x_1^{(n)} = p_1(t) x_1^{(n-1)} + \dots + p_n(t) x_1 + q(t).$$

Әлбетте барлық a_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$ коэффициенттері тұрақты болса, онда $p_j(t)$, $j = \overline{1, n}$ коэффициенттері де тұрақты болады, ал $b_j(t) \equiv 0$, $j = \overline{1, n}$ болса, онда $q(t) \equiv 0$ болады.

Жаттығулар

Төмендегі қалыпты жүйелерді интегралдаңыз.

1. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$.
2. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = x$.
3. $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = x + y + t$.
4. $\dot{x} = x^2/y$, $\dot{y} = x/2$.
5. $2y\dot{x} = x^2 - y^2 + 1$, $\dot{y} = x + y$.